

1. Что такое округление

Округление — математическая операция, позволяющая уменьшить количество знаков в числе за счёт замены числа его приближённым значением с определённой точностью.

2. Виды и способы округления

-)Правила Арифметического округления в десятичной системе:

Число округляется до N-ого знака по-разному в зависимости от N+1 знака:

Если N+1 знак <5 , то N-ый знак не меняется, а N+1 и все последующие обнуляются.

Если N+1 знак ≥ 5 , то N-ый знак увеличивается на единицу, а все знаки начиная с N+1 обнуляются.

3. Виды округления

Помимо математического (англ. round) существуют ещё и другие виды округления: банковское — округление половины (N+1 знак = 5) к ближайшему чётному. В этом случае исчезает систематическая ошибка округления при суммировании большого количества чисел.

округление к большему, округление к $+\infty$ (англ. ceil) — если у числа округляемые знаки не равны нулю, число округляется в большую сторону. Эту форму округления используют при расчётах с потребителями сотовые операторы связи, провайдеры интернет.

округление к меньшему, округление к $-\infty$ (англ. floor) — если у числа округляемые знаки не равны нулю, то число округляется в меньшую сторону (в случае положительных чисел округляемые знаки отбрасываются, в случае отрицательных чисел значение числа увеличивается по модулю).

округление к большему по модулю (округление к бесконечности, округление от нуля) относительно редко используемая форма округления, представляет из себя симметричную версию «округления к большему».

округление к меньшему по модулю, округление к нулю (англ. fix) — это самое «простое» компьютерное округление, заключающееся в «отбрасывании» «лишних» цифр. (11.9 становится равным 11, -0.9 становится равным 0, -1.1 становится равным -1). Иногда округление к нулю ещё называют англ. truncate, потому что для выполнения подобного округления достаточно при выводе числа обрезать поле вывода по нужному количеству знаков.

случайное округление — если $N+1$ знак равен 5, то число округляется в меньшую или большую сторону в случайном порядке.

чередующееся округление — каждый раз, когда $N+1$ знак равен 5, то число поочередно округляется в большую и меньшую сторону.

ненулевое округление — округление производится согласно правилам математического округления, однако если округляется ненулевое число, результатом округления которого должен стать 0, округление производится «от нуля».

При использовании арифметического округления возникает проблема.

Проблема заключается в накоплении статистической погрешности при округлении большого количества чисел. Другими словами, многие задачи требуют, чтобы сумма столбика неокругленных значений была равна, или хотя бы близка сумме столбика округленных значений, а арифметическое округление приводит к серьезной и неизбежной ошибке, нарастающей с объемом данных.

Для решения этой проблемы в середине 70-х под эгидой IEEE неторопливо начал работу комитет по выработке стандарта 754 - о реализациях вычислений с плавающей запятой. Примерно в это же время Intel начал разработку арифметического сопроцессора i8087 для своих процессоров i8086/88. В качестве консультанта был приглашен профессор Вильям Каган, известный успешным сотрудничеством с Hewlett-Packard.

Проект подходил к завершению. В этот сопроцессор удалось втиснуть все лучшее, что было на тот момент. Профессор Каган решил принять участие в работе комитета IEEE, получил от Intel разрешение открыть некоторые спецификации нового сопроцессора (без раскрытия подробностей его реализации), и представил их как проект стандарта. Учитывая, что у конкурентов сопроцессоры были пока лишь в планах, Intel-овские спецификации выгодно отличались продуманностью и завершенностью. Крыть было нечем. Проект де-факто лег в основу стандарта.

Текст стандарта по идее можно получить в первоисточнике (<http://ieee.org>), но обычно ссылаются на сборник связанной с ним информации от IBM (<http://www2.hursley.ibm.com/decimal/>).

Этот стандарт описывает пять способов округления, обязательных для реализации, и два опциональных.

round-down - усечение по направлению к нулю

round-half-up - арифметическое округление

round-half-even - банковское округление

round-ceiling - округление к плюс-бесконечности

round-floor - округление к минус-бесконечности

round-half-down (опционально) - подобно арифметическому, пятерка округляется вниз

round-up - (опционально) округление от нуля

Правда, IEEE 754 требует, чтобы промежуточные результаты вычислений округлялись по-банковски. Но стандарт этот касается реализаторов сопроцессоров, и призван лишь обеспечить переносимость программ в смысле одинаковости результатов на разных системах, а про бухгалтерию там ничего нет.

На практике в большинстве случаев, где не требуются огромные расчеты, используется правило арифметического округления.

Примеры реализаций данных функций в различных языках программирования:

Язык	Функц Арифметического Окр	Функция Бухгалтерского Окр
EXEL	ОКРУГЛ (вызываемая из списка функций для использования в формулах таблицы)	Round (функция VBA, используемая в макросах)
FoxPro 2.6 (DOS)	ROUND	-----
MySQL	1) ROUND - алгоритм зависит от системных библиотек. Может оказаться вовсе не арифметическим и не бухгалтерским. 2) $FLOOR(n * 100 + 0.500001) / 100$	
PostgreSQL	ROUND	

Округление результатов измерений (по материалам СПб АСМС)

Правила записи чисел по СТ СЭВ 543 - 77

1. Значащие цифры данного числа - все цифры от первой слева, не равной нулю, до последней справа. При этом нули, следующие из множителя 10, не учитывают.

Примеры:

- а) Число 12,0 имеет три значащие цифры.
- б) Число 30 имеет две значащие цифры.
- в) Число $120 \cdot 10$ имеет три значащие цифры.
- г) $0,514 \cdot 10$ имеет три значащие цифры.
- д) 0,0056 имеет две значащие цифры.

2. Если необходимо указать, что число является точным, после числа указывают слово "точно" или последнюю значащую цифру печатают жирным шрифтом. Например, в печатном тексте: $1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 3600 \text{ Дж}$ (точно).

3. Различают записи приближенных чисел по количеству значащих цифр.

Примеры.

а) Различают числа 2,4 и 2,40. Запись 2,4 означает, что верны только целые и десятые доли, истинное значение числа может быть, например, 2,43 и 2,38. Запись 2,40 означает, что верны и сотые доли: истинное значение числа может быть 2,403 и 2,398, но не 2,41 и не 2,382.

б) Запись 382 означает, что все цифры верны: если за последнюю цифру ручаться нельзя, то число должно быть записано $3,8 \cdot 10$.

в) Если в числе 4720 верны лишь две первые цифры, оно должно быть записано $47 \cdot 10$ или $4,7 \cdot 10$.

4. Число, для которого указывают допустимое отклонение, должно иметь последнюю значащую цифру того же разряда, как и последняя значащая цифра отклонения.

Примеры.

а) Правильно: $17,0 + 0,2$. Неправильно: $17 + 0,2$ или $17,00 + 0,2$.

б) Правильно: $12,13 + 0,17$. Неправильно: $12,13 + 0,2$.

в) Правильно: $46,40 + 0,15$. Неправильно: $46,4 + 0,15$ или $46,402 + 0,15$.

5. Числовые значения величины и её погрешности (отклонения) целесообразно записывать с указанием одной и той же единицы величины.

Например: $(80,555 + 0,002)$ кг.

6. Интервалы между числовыми значениями величин целесообразно записывать: от 60 до 100, свыше 120 до 150.

Правила округления чисел по СТ СЭВ 543 - 77

1. Округление числа представляет собой отбрасывание значащих цифр справа до определенного разряда с возможным изменением цифры этого разряда.

2. В случае, если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) менее 5, то последнюю сохраняемую цифру не меняют.

Пример: Округление числа 12,23 до трех значащих цифр дает 12,2.

3. В случае, если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) равна 5, то последнюю сохраняемую цифру увеличивают на единицу.

Пример: Округление числа 0,145 до двух цифр дает 0,15.

Примечание. В тех случаях, когда следует учитывать результаты предыдущих округлений, поступают следующим образом.

Если отбрасываемая цифра получена в результате округления в меньшую сторону, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на единицу (с переходом при необходимости в следующие разряды).

Пример: Округление числа 0,25 (полученного в результате предыдущего округления числа 0,252) дает 0,3 .

4. В случае, если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) более 5, то последнюю сохраняемую цифру увеличивают на единицу.

Пример: Округление числа 0,156 до двух значащих цифр дает 0,16.

Округление выполняют сразу до желаемого количества значащих цифр, а не по этапам.

Пример: Округление числа 565,46 до трех значащих цифр дает 565.

6. Целые числа округляют по тем же правилам, что и дробные.

3

Пример: Округление числа 23456 до двух значащих цифр дает $23 \cdot 10^4$.

*Из книги Л.И. Любимов, И.Д. Форсилова, Е.З. Шапиро
«Поверка средств электрических измерений. Справочная книга».
Ленинград, Энергоатомиздат, Ленинградское отделение, 1987 год*

стр. 47 ... 2.7. **Правила округления и записи результатов измерений**

Погрешность результата измерений позволяет определить те цифры результата, которые являются достоверными. Нецелесообразно удерживать в выражении для измеренного значения физической величины большое число цифр, т.к. цифры младших разрядов могут оказаться недостоверными.

Существуют определенные правила округления.

1. В выражении погрешности удерживается не более двух значащих цифр, причем последняя цифра обычно округляется до нуля или пяти. Две цифры следует обязательно удерживать в том случае, когда цифра старшего разряда менее 3.

2. Числовое значение результата измерения должно оканчиваться цифрой того же разряда, что и значение погрешности.

Пример. $235,732 + 0,15$ округляется до $235,73 + 0,15$, но не до $235,7 + 0,15$.

При промежуточных вычислениях целесообразно, чтобы используемые числа содержали на одну значащую цифру больше, чем будет в окончательном результате. Это позволяет уменьшить погрешность от округления.

3. Если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) меньше пяти, то остающиеся цифры не меняются.

Пример. $442,749 + 0,4$ округляется до $442,7 + 0,4$.

4. Если первая из отбрасываемых цифр больше или равна пяти, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Пример. $37,268 + 0,5$ округляется до $37,3 + 0,5$; $37,253 + 0,5$ округляется до $37,3 + 0,5$.

5. Округление следует выполнять сразу до желаемого числа значащих цифр, поэтапное округление может привести к ошибкам.

Пример. Поэтапное округление результата измерения $220,46 + 4$ дает на первом этапе $220,5 + 4$ и на втором $221 + 4$, в то время как правильный результат округления $220 + 4$.

Особенно внимательно нужно относиться к записи результата измерения без указания погрешности (что в общем случае крайне нежелательно). В этом случае в записываемом числе оставляются только те цифры, за достоверность которых можно ручаться, т.е. все значащие цифры записанного числа должны быть достоверными. Значащими цифрами числа считаются все цифры от первой слева, не равной нулю, до последней записанной справа цифры, при этом нули, записанные в виде множителя 10 в степени n , не учитываются. Поэтому записи $2,4 \times 10^3$ В и 2400 В не являются тождественными. Первая запись означает, что верны цифры тысяч и сотен вольт и истинное значение может быть, например, $2,42$ или $2,38$ кВ. Запись 2400 В означает, что верны и единицы вольт, истинное значение может быть $2400,2$ или $2390,8$ В, но не 2420 или 2380 В.

Из книги П.В. Новицкий и И.А. Зограф

"Оценка погрешностей результатов измерений"

Ленинград, Энергоатомиздат, Ленинградское отделение, 1991 год

стр. 25 1 - 4. ПРАВИЛА ОКРУГЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПОГРЕШНОСТИ И РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЙ

Рассчитывая значения погрешности, особенно при пользовании электронным калькулятором, значения погрешностей получают с большим числом знаков. Однако исходными данными для расчета являются нормируемые значения погрешности средств измерения, которые указываются всего с одной или двумя значащими цифрами. Вследствие этого и в окончательном значении рассчитанной погрешности должны быть оставлены только первые одна - две значащие цифры. При этом приходится учитывать следующее. Если полученное число начинается с цифр 1 или 2 , то отбрасывание второго знака приводит

к очень большой ошибке (до 30 - 50 %), что недопустимо. Если же полученное число начинается, например, с цифры 9, то сохранение второго знака, т. е. указание погрешности, например, 0,94 вместо 0,9, является дезинформацией, так как исходные данные не обеспечивают такой точности.

Исходя из этого на практике установилось такое правило: если полученное число начинается с цифры, равной или большей 3, то в нем сохраняется лишь один знак; если же оно начинается с цифр, меньших 3, т. е. с цифр 1 и 2, то в нем сохраняют два знака. В соответствии с этим правилом установлены и нормируемые значения погрешностей средств измерений: в числах 1,5 и 2,5 % указываются два знака, но в числах 0,5; 4; 6 % указывается

лишь один знак.

В итоге можно сформулировать три правила округления рассчитанного значения погрешности и полученного экспериментального результата измерения.

1. Погрешность результата измерения указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и одной, - если первая есть 3 и более.

2. Результат измерения округляется до того же десятичного разряда, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности.

3. Округление производится лишь в окончательном ответе, а все предварительные вычисления проводят с одним - двумя лишними знаками.

Пример . На вольтметре класса точности 2,5 с пределом измерений 300 В был получен отсчет измеряемого напряжения $X = 267,5$ В.

Расчет погрешности удобнее вести в следующем порядке: сперва необходимо найти абсолютную погрешность, а затем - относительную. Абсолютная погрешность $\Delta(X) = j_0 X_k / 100$; при $j_0 = 2,5\%$ и $X_k = 300$ В это даёт $\Delta(X) = 2,5 \times 300 / 100 = 7,5$ В ~ 8 В; относительная

$$j_0 = \Delta(X) \times 100 / X = 7,5 \times 100 / 267,5 = 2,81\% \sim 2,8\%$$

Так как первая значащая цифра значения абсолютной погрешности (7,5 В) больше трех, то это значение должно быть округлено по обычным правилам округления до 8 В, но в значении относительной погрешности (2,81%) первая значащая цифра меньше 3, поэтому здесь должны быть сохранены в ответе два десятичных разряда и указано $j(x) = 2,8\%$. Полученное значение $X = 267,5$ В должно быть округлено до того же десятичного разряда, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности, т. е. до целых единиц вольт.

Таким образом, в окончательном ответе должно быть сообщено: "Измерение произведено с относительной погрешностью $j(x) = 2,8\%$. Измеренное напряжение $X = (268 \pm 8)$ В или $X = 268$ В ± 8 В.

При этом более наглядно указать пределы интервала неопределенности измеренной величины в виде $X = (260 - 276)$ В или 260 В $< X < 276$ В.

Наряду с изложенными правилами округления значений погрешностей результатов измерения иногда предлагаются более обоснованные, но и более сложные правила. Недостаток изложенных правил состоит в том, что относительная погрешность от округления изменяется скачком при переходе, например, от числа 0,29, когда она составляет $(0,30 - 0,29) / 0,30 = 3\%$, к числу 0,3, когда она будет $(0,4 - 0,3) / 0,3 = 30\%$. Для устранения столь резкого скачка относительной погрешности округления предлагается каждую декаду возможных значений округляемой погрешности делить на три части: от 0,1 до 0,2, от 0,2 до

0,5 и от 0,5 до 1,0, и в каждой из этих частей использовать свой шаг округления, соответственно равный 0,02, 0,05 и 0,1. Тогда ряд разрешенных к употреблению округленных значений погрешностей получает вид: 0,10 - 0,12 - 0,14 - 0,16 - 0,18 - 0,20 - 0,25 - 0,30 - 0,35 - 0,40 - 0,45 - 0,5 - 0,6 - 0,7 - 0,8 - 0,9 - 1,0. Бесспорное преимущество такого ряда состоит в том, что погрешность от округления на границах

участков изменяется лишь от 5 до 10 % . Однако при использовании такого правила округления погрешности последние цифры результата, оставляемые после округления, также должны соответствовать приведенному ряду.

Из книги В.А.Кузнецова и Г.В.Ялунина " МЕТРОЛОГИЯ

теоретические, прикладные и законодательные основы "

Москва, Изд - во стандартов, 1998 г.

стр. 215 7.6 Рекомендуемые правила по округлению результатов измерений

Результаты измерений следует округлять по сложившимся правилам. В основе этих правил лежит следующее положение: числовое значение результата измерений представляется так, чтобы оно оканчивалось десятичным знаком того же разряда, какой имеет погрешность этого результата.

Правила округления результата измерений для случаев обычных измерений, не связанных с необходимостью получения высокоточных результатов:

- 1)** погрешность результата измерений представляется с одной или двумя значащими цифрами. Две значащие цифры приводятся в случае выполнения точных измерений;
- 2)** результат измерений округляется так, чтобы он оканчивался цифрой того же разряда, что и значение погрешности. Если числовое значение результата измерения представляется десятичной дробью, оканчивающейся нулями, то нули отбрасываются только до того разряда, который соответствует разряду числового значения погрешности;
- 3)** если цифра старшего из отбрасываемых разрядов меньше 5, то остающиеся цифры в

числе не изменяют. Если эта цифра равна или больше 5, то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу. Лишние цифры в целых числах заменяют нулями, а в десятичных дробях отбрасывают. Например, числовое значение результата измерения составляет 25,458 при погрешности результата, выраженной пределами $\pm 0,02$; округление результата будет 25,46. Если пределы погрешности имеют $\pm 0,002$, то числовое значение результата сохраняется полностью. Числовое значение результата измерений 105553 получено с погрешностью $\pm 0,0005$. В нем сохраняются четыре значащие цифры и округление даст число 105600; если числовое значение результата 105,553, то при тех же условиях округление дает число 105,6;

4) если отбрасываемая цифра равна пяти, а следующие за ней цифры неизвестны (отсутствуют) или нули, то последнюю сохраняемую цифру числа не изменяют, если она четная, и увеличивают на единицу, если она нечетная. Число 105,5 при сохранении трех значащих цифр округляют до 106;

5) правила, изложенные в п.1...4, применяются только при округлении окончательных результатов. Все промежуточные результаты целесообразно представлять тем числом разрядов, которые удастся получить